

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Директор Высшей школы
современной математики
А.Н. Соболевский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Спектральная геометрия
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика
	Высшая школа современной математики
	Высшая школа современной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 84 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 144, всего зач. ед.: 4

Программу составил: А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

Аннотация

Спектральная геометрия - современная и интенсивно развивающаяся область математики, находящаяся на стыке дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциальной геометрии и анализа, которая изучает связь между геометрией области с одной стороны и спектром оператора Лапласа и собственными функциями оператора Лапласа с другой стороны. По-видимому, первым вопросом спектральной геометрии был заданный лордом Рэлеем в его знаменитой книге «Теория звука» вопрос о том, какой должна быть форма мембраны барабана, чтобы среди мембран той же площади она издавала звук самой низкой частоты. Во второй половине двадцатого века Марк Кац сформулировал другой известный вопрос: «Можно ли услышать форму барабана?». Ответы на этот и другие вопросы мы обсудим в данном курсе, а что еще более интересно - узнаем еще больше вопросов, на которые мы еще не знаем ответа.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение теоретических основ спектральной геометрии; формирование математической культуры, исследовательских навыков. в том числе для решения вычислительных задач, и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области дифференциальной геометрии;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в соотнесении результатов дифференциальной геометрии с контекстом других математических дисциплин

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1 Определяет приоритеты профессиональной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки
	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

Основные понятия и результаты спектральной геометрии.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием спектральной геометрии..

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Спектр простейших областей.	4			7
2	Вариационное описание собственных чисел оператора Лапласа.	2			7
3	Элементарные неравенства для собственных чисел.	4			7
4	Теорема Вейля.	2			7
5	Изоспектральные области.	4			7
6	Нодальные области.	2			7
7	Неравенство Фабера-Крана.	2			7
8	Оператор Лапласа-Бельтрами на римановом многообразии.	2			7
9	Теорема Херша.	2			7
10	Конформный объем.	2			7
11	Максимизация собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на конкретных поверхностях.	2			7
12	Экстремальные метрики.	2			7
Итого часов		30			84
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		144 час., 4 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Спектр простейших областей.

Уравнение струны, волновое уравнение.

Разделение переменных.

Оператор Лапласа, задачи Дирихле, Неймана и Стеклова.

Физический смысл спектральных задач.

Спектры простейших областей.

2. Вариационное описание собственных чисел оператора Лапласа.

Вариационное описание собственных чисел оператора Лапласа.

3. Элементарные неравенства для собственных чисел.

Элементарные неравенства для собственных чисел.

Вилка Дирихле-Неймана.

Доказательство Филонова неравенства Фридландера.

Другие неравенства.

4. Теорема Вейля.

Теорема Вейля и ее доказательство для областей в евклидовом пространстве.

Гипотеза Вейля.

5. Изоспектральные области.

Что можно, а что нельзя услышать? Изоспектральные области.

6. Нодальные области.

Нодальные области, нодальный граф.

Теорема Куранта о нодальных областях.

Нодальная геометрия.

Теорема Берса.

Теоремы Плейеля и Брюнинга.

7. Неравенство Фабера-Крана.

Сферическое переключивание и доказательство неравенства Фабера-Крана.

8. Оператор Лапласа-Бельтрами на римановом многообразии.

Оператор Лапласа-Бельтрами на римановом многообразии.

Связь собственных функций с минимальными поверхностями (теорема Такахаси).

Спектр и собственные функции сферы.

9. Теорема Херша.

Геометрическая оптимизация собственных чисел на поверхностях.

Теорема Херша.

10. Конформный объем.

Конформный объем.

Функционал Уилмора.

Теорема Ли-Яу.

11. Максимизация собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на конкретных поверхностях.

Максимизация собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на конкретных поверхностях.

12. Экстремальные метрики.

Экстремальные метрики.

Связь экстремальных метрик с минимальными поверхностями (теорема Надирашвили-Эль-Суфи-Илиаса).

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Линейные операторы [Текст] / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц при участии У. Бейда, Р. Бартла; пер. с англ. Л. И. Головиной, Б. С. Митягина; под. ред. и с предисл. А. Г. Костюченко - М.Едиториал УРСС,2004

Дополнительная литература

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	<u>4</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Экзамен

Разработчик: А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1 Определяет приоритеты профессиональной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки
	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Спектральная геометрия» обучающийся должен:

знать:

Основные понятия и результаты спектральной геометрии.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием спектральной геометрии..

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Уравнение струны, волновое уравнение, разделение переменных. Оператор Лапласа, задачи Дирихле, Неймана и Стеклова, физический смысл.
2. Спектр простейших областей.
3. Вариационное описание собственных чисел оператора Лапласа.

4. Элементарные неравенства для собственных чисел, вилка Дирихле-Неймана. Доказательство Филонова неравенства Фридландера. Другие неравенства.
5. Теорема Вейля и ее доказательство для областей в евклидовом пространстве. Гипотеза Вейля.
6. Что можно, а что нельзя услышать? Изоспектральные области.
7. Нодальные области, нодальный граф, теорема Куранта о нодальных областях. Нодальная геометрия. Теорема Берса. Теоремы Плейеля и Брюнинга.
8. Сферическое переключивание и доказательство неравенства Фабера-Крана.
9. Оператор Лапласа-Бельтрами на римановом многообразии. Связь собственных функций с минимальными поверхностями (теорема Такахаси). Спектр и собственные функции сферы.
10. Геометрическая оптимизация собственных чисел на поверхностях. Теорема Херша.
11. Конформный объем. Функционал Уилмора. Теорема Ли-Яу.
12. Максимизация собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на конкретных поверхностях.
13. Экстремальные метрики. Связь экстремальных метрик с минимальными поверхностями (теорема Надирашвили - Эль-Суфи - Илиаса).

Пример экзаменационного билета:

- 1) Нодальные области.
- 2) Максимизация собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами (примеры).

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.